

- Debías recibir, amigo mío, la mitad de 35, o sea 17 y medio, recibirás, en cambio, la mitad de 36, o sea, 18. Nada puedes reclamar pues es claro que sales ganando con esta división.

Dirigiéndose al segundo heredero continuó.

- Tú, Hamed Namir debías recibir un tercio de 35, o sea 11 camellos y pico. Vas a recibir un tercio de 36, es decir, 12. No podrás protestar porque también es evidente que ganas con el cambio.

Y, dijo, por fin al más joven:

- A ti, joven Harin Namir, que según la voluntad de tu padre debías recibir una novena parte de 35, o sea tres camellos y parte de otro, te daré un novena parte de 36, o sea, 4 y tu ganancia será también evidente, por lo cual sólo te queda agradecerme el resultado.

Luego continuó diciendo:

- Por esa ventajosa división que ha favorecido a todos vosotros, tocarán 18 camellos al primero, 12 al segundo y 4 al tercero, lo que da un resultado de (18 + 12 + 4) de 34 camellos. De los 36 camellos sobran, por lo tanto, dos. Uno, pertenece como saben a mi amigo el "bagdalí" y el otro me toca a mi, por derecho y por haber resuelto a satisfacción de todos el difícil problema de la herencia.

¡Sois inteligente extranjero! - exclamó el más viejo de los hermanos- Aceptamos vuestro reparto con la seguridad de que fue hecho con justicia y equidad.

El astuto Beremís - "el hombre que calculaba" tomó luego posesión de uno de los más hermosos jamales del grupo y me dijo, entregándome por la rienda el animal que me pertenecía:

- Podrías ahora, amigo, continuar tu viaje en tu manso y seguro camello. Tengo ahora yo, uno solamente para mi.

Y continuamos nuestra jornada hacia Bagdad.

Tomado de: "El hombre que calculaba"

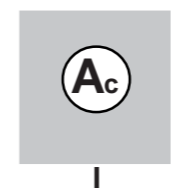
Reflexiona con tus compañeros

1. Que explicación le darías tu a lo sucedido?
2. Si la herencia es de 54 camellos ¿Cuántos le toca a cada uno? y ¿Cuánto sobra?
3. Investiga el significado de: eximio, algebrista, jamal, improprios

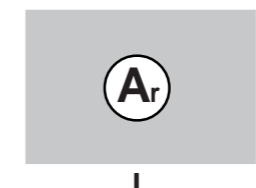
ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Para cada tipo de polígono existe una manera diferente de calcular el área. Ya sabemos que el **área** es la superficie comprendida dentro de un perímetro. Se representa con la letra **(A)**.

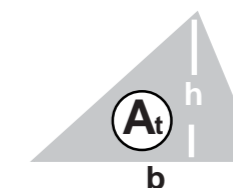
Vamos a calcular el área del cuadrado, del rectángulo y del triángulo.



Ac = Área del cuadrado
 l = lado
 $Ac = l \cdot l = l^2$

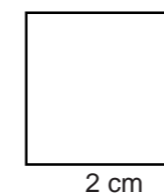


Ar = Área del rectángulo
 l = lado
 a = ancho $Ar = l \cdot a$

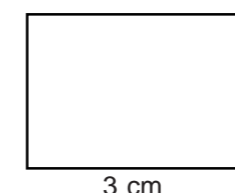


At = Área del triángulo
 h = altura
 b = base
 $Ar = \frac{b \cdot h}{2}$

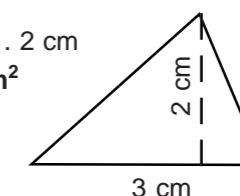
Ejemplos



$$Ac = 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\ = (2 \text{ cm})^2 \\ = 4 \text{ cm}^2$$



$$Ac = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\ = 6 \text{ cm}^2$$



$$Ar = \frac{3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} \\ = \frac{6 \text{ cm}^2}{2} \\ = 3 \text{ cm}^2$$

Problema de aplicación

El área disponible para la construcción de una casa se distribuye de acuerdo al plano siguiente:

Hallar el área de cada división si tienen las siguientes medidas.



1. Cuartos : $a = 3\text{m}$, $l = 4\text{m}$
2. Sala : $a = 4\text{m}$, $l = 5\text{m}$
3. Comedor : $a = 5\text{m}$, $l = 5\text{m}$
4. Cocina : $a = 3\text{m}$, $l = 5\text{m}$
5. Baño: $a = 2\text{m}$, $l = 4\text{m}$
6. Área total de la casa: _____

EJERCICIOS

1. Complete las siguientes "tablas" según las explicaciones anteriores:

↕	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
6 m ²				
12 dm ²				
13 cm ²				
9 mm ²				

↕	Km ²	Hm ²	Dm ²	m ²
35 Dm ²				
16 Hm ²				
14 Km ²				

2. Complete los siguientes ejercicios, según lo explicado anteriormente:

- 3 m². = _____ dm². _____
- 17 m². = _____ cm². _____
- 20 m². = _____ mm². _____
- 125 dm². = _____ cm². _____
- 232 dm². = _____ mm². _____
- 315 cm². = _____ mm². _____

3. Complete los siguientes ejercicios, según lo explicado anteriormente:

- 7 Dm. = _____ m². _____
- 14 Hm. = _____ mts. _____
- 38 Km. = _____ mts. _____
- 67 Km. = _____ Hm. _____
- 116 Km. = _____ Dm. _____
- 232 Hm. = _____ Dm. _____

POTENCIACIÓN



En un abasto hay 2 bultos de leche en polvo.
 En cada bulto hay 2 cajas.
 En cada caja hay 2 paquetes.
 Y en cada paquete hay 2 latas de leche.
 ¿Cuántas latas de leche hay en el abasto?
 El problema anterior queda expresado, en forma de producto, de la siguiente manera:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = \square$$

Este producto se puede abreviar utilizando la siguiente expresión:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \rightarrow \text{Exponente (Veces que se repite)}$$

└──────────┬──────────> Base (Número que se repite)

La expresión se lee: " dos elevado a la cuatro" o "dos a la cuatro"

Esta forma abreviada de expresar un producto se denomina potencia

POTENCIACIÓN es la operación que nos permite multiplicar un número (**base**) tantas veces como lo indique otro número (**exponente**).

Ejemplos:

- a) 2⁴ = 2 x 2 x 2 x 2 = 16
- b) 5³ = 5 x 5 x 5 = 125
- c) 6⁵ = 6 x 6 x 6 x 6 x 6 = 7776
- d) 3⁶ = 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 729

Si el exponente es 3 se lee: " a la tres" o "al cubo"
Si el exponente es 2 se lee: " a la dos " o " al cuadrado"

Es posible que se presenten casos donde las potencias no tengan igual base .

Ejemplo: 2²x 6³ o 3 x 3 x 3 x 4 x 4.

En este caso se multiplican solamente las que tengan igual base

$$2^2 \times 6^3 = 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 864 , \quad 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 = 3^3 \times 4^2$$

EJERCICIOS

1. Escriba sobre la raya, la base y el exponente de las siguientes potencias:

- a) $2^3 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____ d) $5^3 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____
 b) $4^2 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____ e) $6^4 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____
 c) $3^6 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____ f) $7^5 \rightarrow$ Base ____ Exponente ____

2. Convierta las siguientes operaciones en potencia y resuelva:

- a) $8 \times 8 \times 8 =$ g) $4 \times 4 =$ m) $16 \times 16 =$
 b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ h) $5 \times 5 \times 5 =$ n) $6 \times 6 \times 6 =$
 c) $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ i) $10 \times 10 \times 10 =$ ñ) $7 \times 7 =$
 d) $9 \times 9 \times 9 \times 3 \times 3 =$ j) $2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 =$ o) $13 \times 13 \times 6 \times 6 \times 6 =$
 e) $14 \times 14 \times 10 \times 10 =$ k) $7 \times 4 \times 4 \times 4 =$ p) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 2 =$
 f) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 =$ l) $10 \times 10 \times 3 \times 3 \times 3 =$ q) $8 \times 8 \times 8 \times 2 \times 2 \times 5 =$

3. Complete el cuadro siguiente colocando "X" en la casilla de verdadero o de falso, respondiendo a lo que se plantea:

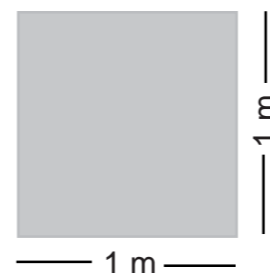
PLANTEAMIENTO	VERDADERO	FALSO
$5 \times 5 = 5^2$	X	
$8^3 = 8 \times 3$		
$6^2 = 36$		
$4 \times 4 \times 4 = 12$		
$1^3 = 1$		
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$		
$2^4 = 2 \times 4$		
$5^3 = 125$		
$7 \times 7 \times 7 = 143$		
$2^3 \times 3^4 = 648$		

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Para medir áreas se utilizan las medidas de superficie.

Recuerda que:

- el **área** es la superficie comprendida dentro de un perímetro.
 - toda superficie tiene dos dimensiones, largo (l) y ancho (a)
- Supongamos una superficie de 1 m de ancho y 1 m de largo



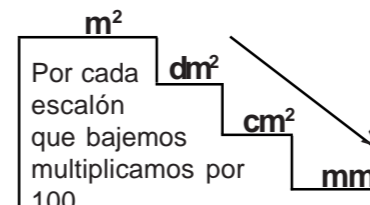
$1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ (m.m)} = 1 \text{ m}^2$

De acuerdo a esto las medidas de superficie tienen como unidad el **metro cuadrado** (m^2).

El metro cuadrado (m^2) contiene otras "unidades" que son inferiores a él. Éstas son: el **decímetro cuadrado** (dm^2), el **centímetro cuadrado** (cm^2) y el **milímetro cuadrado** (mm^2).

La equivalencia, entre estas medidas es:

	dm^2	cm^2	mm^2
m^2	100	10000	1000000
dm^2		100	10000
cm^2			100



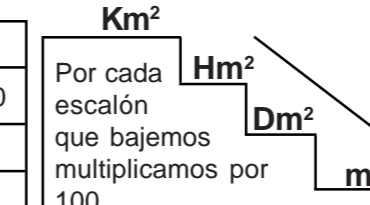
	dm^2	cm^2	mm^2
3 m^2	300	30000	3000000
6 dm^2		600	60000
30 cm^2			3000

El metro cuadrado también tiene "unidades" que son superiores a él.

Éstas son: **Decámetro cuadrado** (Dm^2), **Hectómetro cuadrado** (Hm^2) y **Kilómetro cuadrado** (Km^2).

La equivalencia, entre estas medidas es:

	Hm^2	Dm^2	m^2
Km^2	100	10000	1000000
Hm^2		100	10000
Dm^2			100

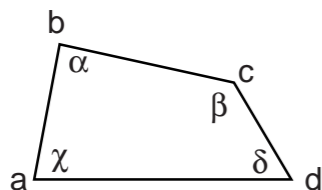


	Hm^2	Dm^2	m^2
3 Km^2	300	30000	3000000
6 Hm^2		600	60000
30 Dm^2			3000

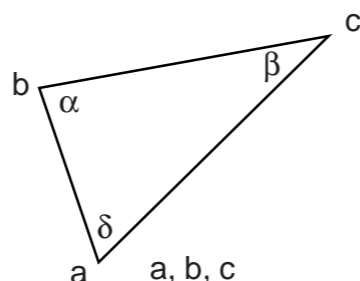
Recuerde: la inicial de las medidas inferiores se escriben con letra **minúscula**: dm, cm, mm. y la de las medidas superiores se escriben con letra **mayúscula**: Dm, Hm, Km.

EJERCICIOS

1. Identifique los elementos de los siguientes polígonos:

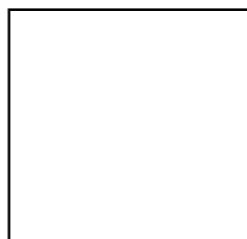
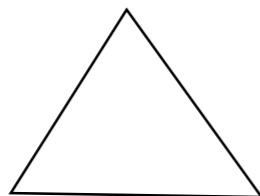
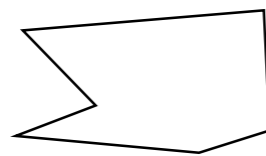
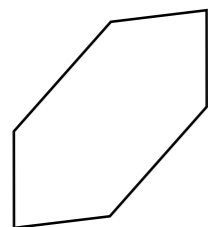


a, b, c, d _____
 ab, bc, cd, ad _____
 alpha, beta, gamma, delta _____



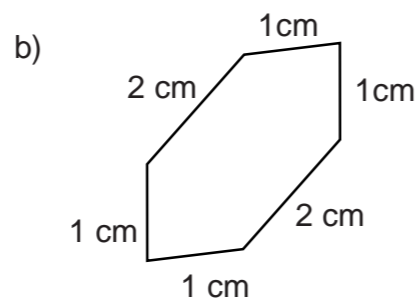
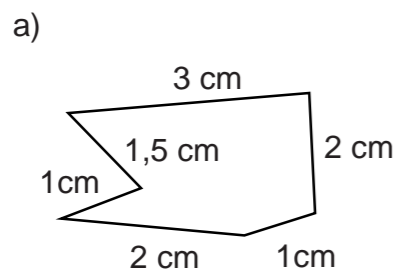
a, b, c _____
 ab, bc, ca _____
 alpha, beta, delta _____

2. Clasifique los siguientes polígonos:

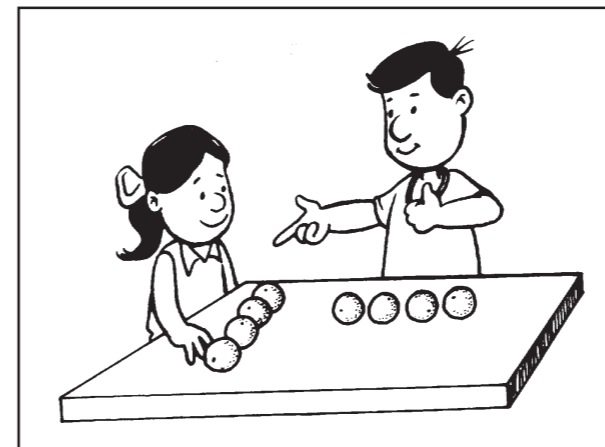


a. _____ b. _____ c. _____ d. _____

3. Halle el perímetro de los siguientes polígonos:



DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN SUS FACTORES PRIMOS



Un número **es divisible** entre otro cuando al dividirlos, el cociente es entero y el resto es cero. Por ejemplo $8:2=4$

8 **es divisible** entre 2.

Un número **es primo** cuando sólo es divisible por él mismo y por la unidad. Por ejemplo:

PRIMO : 2

$2 : 2 = 1$

$2 : 1 = 2$

NO PRIMO : 6

$6 : 1 = 6$

$6 : 2 = 3$

$6 : 3 = 2$

$6 : 6 = 1$

Descomponer un número en sus factores primos consiste en hallar todos los divisores primos del número.

Ejemplo: Descomponer en factores primos el número 30

El procedimiento práctico es el siguiente:

	DIVISORES
30	2
15	3
5	5
1	

Colocamos el número (30) a la izquierda

1. Se divide el número por el menor divisor primo, diferente de 1 (2) y el cociente (15) se coloca debajo del 30.

2. El cociente obtenido (15) se divide entre el siguiente divisor (3) si no es divisible entre 2, el cociente (5) se escribe debajo del 15.

3. Se continúa la división hasta obtener cociente 1

El número 30 se expresa como producto de sus factores: $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Otro ejemplo:

24	2	
12	2	
6	2	
3	3	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
1		

$64 \mid 2$

$32 \mid 2$

$16 \mid 2$

$8 \mid 2$

$4 \mid 2$

$2 \mid 2$

$1 \mid$

$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

Si hay un factor que se repite se escribe en forma de potencia

EJERCICIOS

1. Descomponer los siguientes números en sus factores primos:

a) 12 |
12 =

b) 26 |
26 =

c) 35 |
35 =

d) 48 |
48 =

e) 57 |
57 =

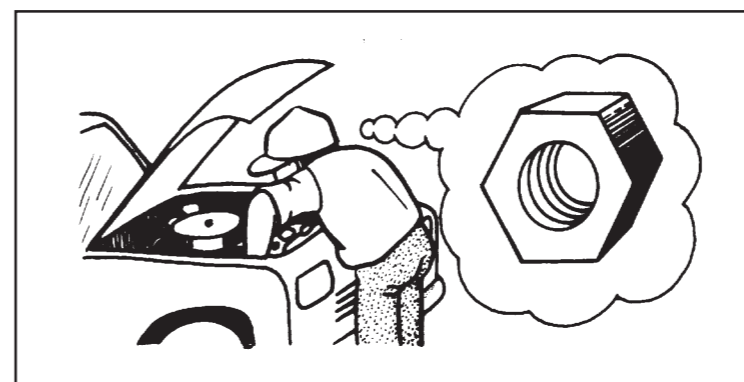
f) 64 |
64 =

2. Coloque el número que corresponda a las siguientes descomposiciones factoriales:

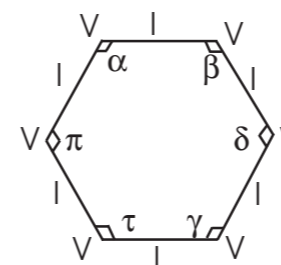
- a) $2 \times 3 =$
- b) $2 \times 7 =$
- c) $5 \times 7 =$

- d) $2 \times 3 \times 5 =$
- e) $3 \times 5 \times 7 =$
- f) $11 \times 3 \times 2 =$

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA Los Polígonos



1.. Polígono:
Es la figura geométrica limitada por líneas rectas o curvas.
Ejemplos:



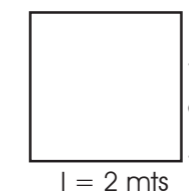
En todo polígono se consideran los siguientes elementos:
LADOS (l): Son los segmentos que forman la poligonal.
VÉRTICES (V): Los puntos de unión de dos segmentos.
ÁNGULOS (α, β, \dots): Aberturas formados por dos segmentos consecutivos (lados).
PERÍMETRO (P): Es la suma de las longitudes de los lados. ($l + l + l + \dots$). Se calcula sumando los lados del polígono.

Ejemplo :
¿Cuál es el perímetro de un terreno cuadrado, que tiene 2 mts por cada lado?

$$P = L + L + L + L$$

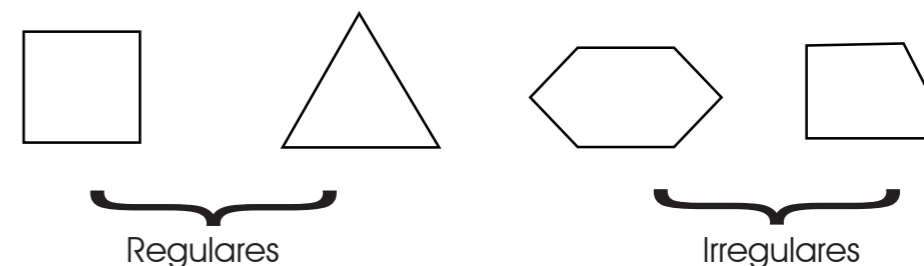
$$P = 2 \text{ mts} + 2 \text{ mts} + 2 \text{ mts} + 2 \text{ mts}$$

$$P = 8 \text{ mts}$$



2. Tipos de polígonos:

- a. **Regulares:** Tienen todos sus lados y ángulos iguales.
- b. **Irregulares:** No tienen los lados y ángulos iguales.



EJERCICIOS

1. Complete las siguientes "tablas" según las explicaciones anteriores:

↕	m	dm	cm	mm
6 m	1			
12 dm		1		
13 cm			1	
9 mm				1

↕	Km	Hm	Dm	m
35 Dm		1		
16 Hm			1	
14 Km				1

2. Complete los siguientes ejercicios, según lo explicado anteriormente:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 3 mts. = _____ dm. | 6 mts. = _____ dm. |
| 17 mts. = _____ cm. | 19 mts. = _____ cm. |
| 20 mts. = _____ mm. | 33 mts. = _____ mm. |
| 125 dm. = _____ cm. | 80 dm. = _____ cm. |
| 232 dm. = _____ mm. | 246 dm. = _____ mm. |
| 315 cms. = _____ mm. | 410 cms. = _____ mm. |

3. Complete los siguientes ejercicios, según lo explicado anteriormente:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 7 Dm. = _____ mts. | 8 Dm. = _____ mts. |
| 14 Hm. = _____ mts. | 17 Hm. = _____ mts. |
| 38 Km. = _____ mts. | 45Km. = _____ mts. |
| 67 Km. = _____ Hm. | 90 Km. = _____ Hm. |
| 116 Km. = _____ Dm. | 126 Km. = _____ Dm. |
| 232 Hm. = _____ Dm. | 318 Hm. = _____ Dm. |

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M. C. M.)

Múltiplo de un número: un número **a** es múltiplo de otro **b** si $a = n \cdot b$, donde **n** es un número natural

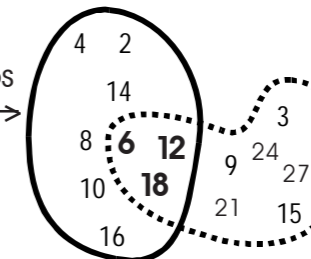
Vamos a formar un conjunto de múltiplos de 2 y de 3:

M2: $1 \cdot 2 = 2$ $4 \cdot 2 = 8$ $7 \cdot 2 = 14$
 $2 \cdot 2 = 4$ $5 \cdot 2 = 10$ $8 \cdot 2 = 16$
 $3 \cdot 2 = 6$ $6 \cdot 2 = 12$ $9 \cdot 2 = 18$

M3: $1 \cdot 3 = 3$ $4 \cdot 3 = 12$ $7 \cdot 3 = 21$
 $2 \cdot 3 = 6$ $5 \cdot 3 = 15$ $8 \cdot 3 = 24$
 $3 \cdot 3 = 9$ $6 \cdot 3 = 18$ $9 \cdot 3 = 27$



M2 = Múltiplos de 2 →



M3 = Múltiplos de 3 ←

6, 12, 18 son múltiplos comunes de 2 y 3.
 ¿Cuál es el menor? _____

En el caso anterior el m.c.m de 2 y 3 es **6**. Se expresa como: **mcm (2,3) = 6**
 Para otros números es posible que este procedimiento sea un tanto difícil. Para salvar esta dificultad existe un procedimiento más sencillo. Pon mucha atención:

Hallar el m.c.m. de 10 y 12

10	2	12	2
5	5	6	2
1		3	3
		1	

1° Se descomponen en sus factores primos.

$10 = 2 \cdot 5$

$12 = 2^2 \cdot 3$

2° Se multiplican los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

mcm (10,12) = 60

El mínimo común múltiplo: es el múltiplo de menor valor común a varios números. Es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Otro ejemplo:

15	3	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

$15 = 3 \cdot 5$

$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$45 = 3^2 \cdot 5$

mcm (15,30,45) = 90

EJERCICIOS

- ¿Qué es el m.c.m. (mínimo común múltiplo)?
- Compare los siguientes conjuntos de múltiplos y responda la pregunta:

$$4M = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \dots$$

$$8M = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, \dots$$

¿Cuál es el m.c.m. de 4 y 8? ¿Por qué?

- Calcule el m.c.m. de los siguientes números:

a) 8 y 16:

b) 50 y 75:

c) 8 y 12:

d) 20, 50 y 75:

LAS MEDIDAS DE LONGITUD (EL METRO)



Al comprar determinadas cosas, debemos conocer sus medidas, es decir, comparar su longitud.

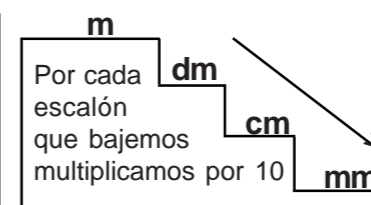
En nuestra cultura utilizamos la unidad de longitud llamada "**metro**" que se abrevia **m**.

El metro: Es la unidad básica utilizada para medir la longitud.

Para facilitar y precisar las medidas se usan otras unidades derivadas del metro: el decímetro (**dm.**), el centímetro (**cm.**) y el milímetro (**mm.**).

Las equivalencias, entre unas unidades y otras, son fáciles pues van de 10 en 10.

	dm	cm	mm
m	10	100	1000
dm		10	100
cm			10



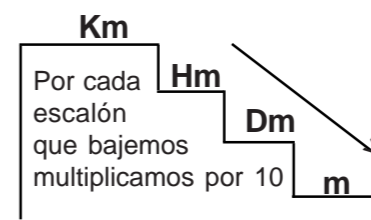
	dm	cm	mm
3 m	30	300	3000
6 dm		600	6000
30 cm			300

Para grandes medidas se usan otras unidades superiores:

Estas son: Decámetro (**Dm.**), Hectómetro (**Hm.**) y Kilómetro (**Km.**).

Las equivalencias, se obtienen de igual manera:

	Hm	Dm	m
Km	10	100	1000
Hm		10	100
Dm			10



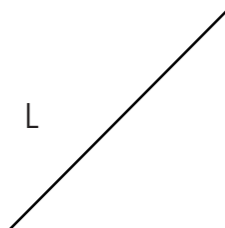
	Hm	Dm	m
3 Km	30	300	3000
6 Hm		600	6000
30 Dm			300

Las unidades derivadas inferiores son llamadas **submúltiplos**

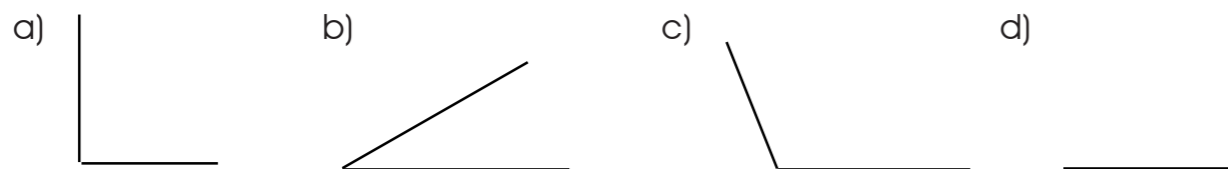
Las unidades derivadas superiores son llamadas **múltiplos**

EJERCICIOS

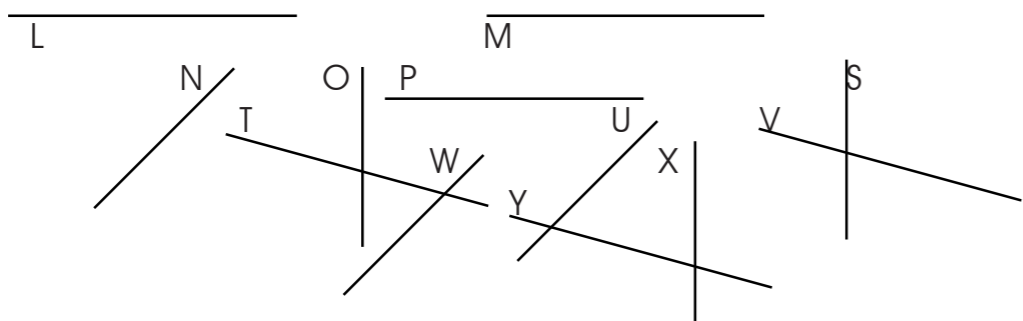
1. Cuántas rectas paralelas podemos trazar a una recta dada (L). Traza al menos cinco rectas.



2. Asígnale un valor y un nombre a los siguientes ángulos. Usa el transportador.

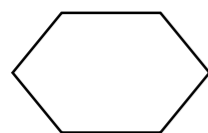


3. En el siguiente conjunto de rectas, relaciona las que sean paralelas entre si.

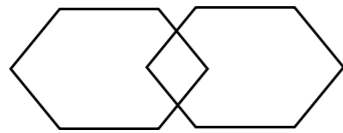


4. Resuelve la siguientes situación.

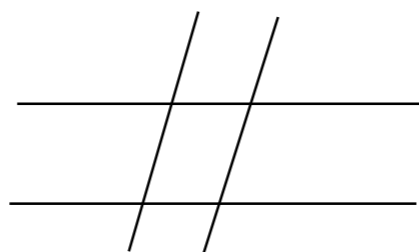
¿Cuántos ángulos tienen las siguientes figuras?



a. _____



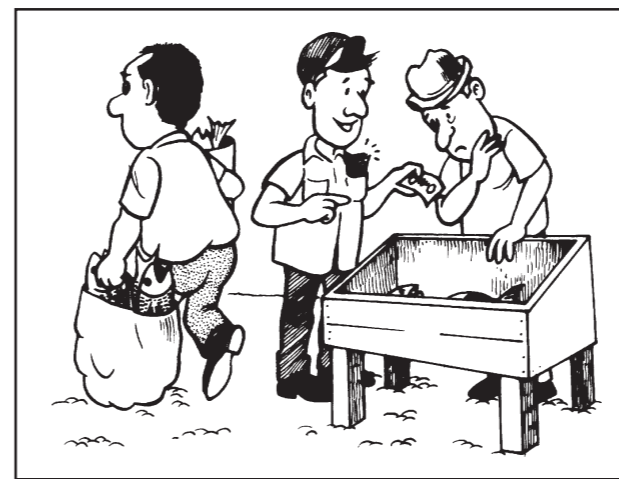
b. _____



c. _____

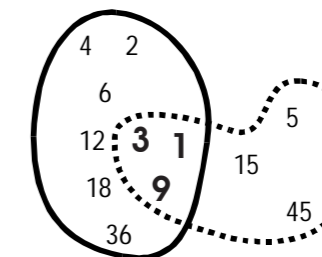
Máximo Común Divisor (M. C. D.)

Divisor de un número: un número es divisor de otro si al dividirlo el cociente es exacto.



Vamos a hallar los divisores de 36 y 45:

D36: $36:2 = 18$ $36:3 = 12$ $36:4 = 9$
 $36:6 = 6$ $36:9 = 4$ $36:12 = 3$
 $36:18 = 2$ $36:36 = 1$
 D45: $45:3 = 15$ $45:5 = 9$ $45:9 = 5$
 $45:15 = 3$ $45:45 = 1$



1, 3 y 9 son los divisores comunes.
 ¿Cuál es el mayor? _____

Para hallar el máximo común divisor de varios números también podemos aplicar un procedimiento que nos facilita el trabajo. Pon mucha atención.

Hallar el M.C.D. de 50 y 20

50	2	20	2
25	5	10	2
5	5	5	5
1		1	

1. Descomponemos los números en sus factores **primos**.

$50 = 2 \times 5^2$ $20 = 2^2 \times 5$

2. Multiplicamos los divisores **comunes**, con su **menor** exponente.
 $2 \times 5 = 10$

3. Se obtiene así el M.C.D.

M.C.D. (50, 20) = 10

Máximo Común Divisor: es el mayor divisor común a varios números. Es el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

Otro ejemplo: Hallar el M.C.D. de 30, 50 y 90

30	2	50	2	90	2
15	3	25	5	45	3
5	5	5	5	15	3
1		1		5	5
				1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$50 = 2 \cdot 5^2$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Factores comunes con su menor exponente

$2 \cdot 5 = 10$

M.C.D. (30, 50, 90) = 10

EJERCICIOS

1. ¿Qué es el M.C.D.?

2. Sean los números 30 y 42

D (30) 1,2,3,5,6,10,15,30

D (42) 1,2,3,6,7,14,21,42

a. ¿Cuáles son los divisores comunes de los conjuntos dados?

b. ¿Cuál de los divisores comunes es el mayor?

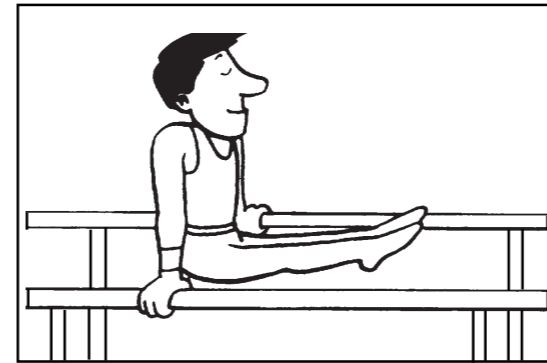
c. ¿Cuál es el M.C.D. de los números 30 y 42?

3. Halle el M.C.D. de 60 y 25

4. Halle el M.C.D. de 18, 17 y 30

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

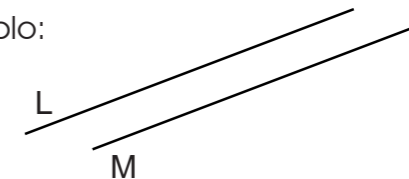
Rectas paralelas y ángulos



Rectas Paralelas:

Dos rectas son paralelas, cuando situadas en un mismo plano no tienen puntos comunes, es decir, no se cortan nunca.

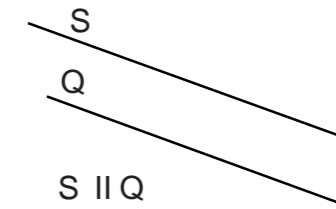
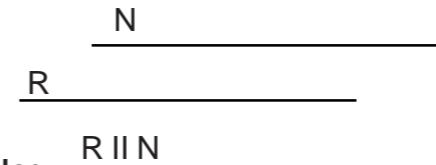
Ejemplo:



Notación:

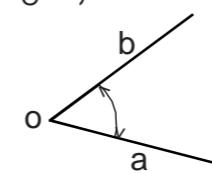
Para expresar que dos o más rectas son paralelas se usa el símbolo (||) y se escribe **L || M**. Se lee: "L es paralela a M".

Otro ejemplo:



Los ángulos:

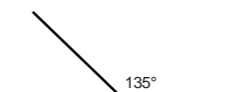
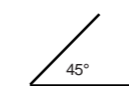
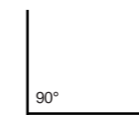
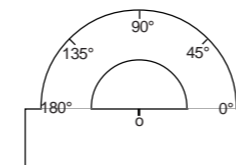
Son aberturas formadas por dos semirectas (lados) que se cortan en un punto (vértice u origen).



o es el origen o vértice
ob y **oa** son los lados

∠ob es el ángulo, también se le puede asignar una letra griega: alfa (α), beta (β), ganma (γ), etc.

Los ángulos se miden en grados, se expresan agregándole al número el símbolo ($^\circ$). 5° se lee "5 grados". Se miden con el transportador.



Además de **b**,
¿Cuántos ángulos
tiene la estrella?



MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Ejercicios complementarios

1. Los dibujos corresponden a máquinas imaginarias de hallar el Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor de los números. Escriba en los círculos vacíos los números que usted crea conveniente.

Realice los cálculos en el cuaderno.

12
16
24
36 48

m.c.m
 M.C.D

25
15
30
45 60

m.c.m
 M.C.D

12
25
24
17 19

m.c.m
 M.C.D

6
32
24
64 48

m.c.m
 M.C.D

16
8
24
32 72

m.c.m
 M.C.D

7
11
17

m.c.m
 M.C.D

35
20
10 25

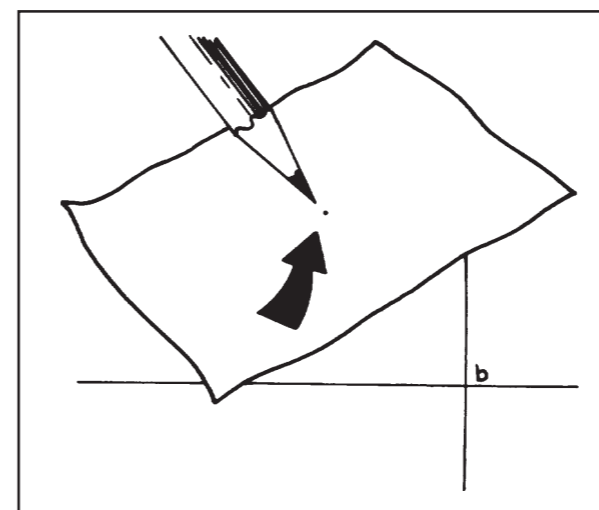
m.c.m
 M.C.D

18
81
9
27

m.c.m
 M.C.D

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

El punto y la recta



El Punto:

La marca hecha con un lápiz bien afilado sobre la superficie de una hoja de papel, nos da la idea de punto.

El punto geométrico no tiene dimensiones, ni largo, ni ancho, ni alto.

Al trazar en un plano dos rectas que se cruzan, observamos que se cortan o "intersecan", la intersección de dos rectas es un "punto".

Notación:

El punto se designa con una letra minúscula, así: se escribe **b** y se lee: punto **b**.

La Línea Recta:

Es un conjunto de puntos que se extienden indefinidamente en una misma dirección y en ambos sentidos.

Los puntos o las flechas en cada uno de los extremos indican que la recta es ilimitada.

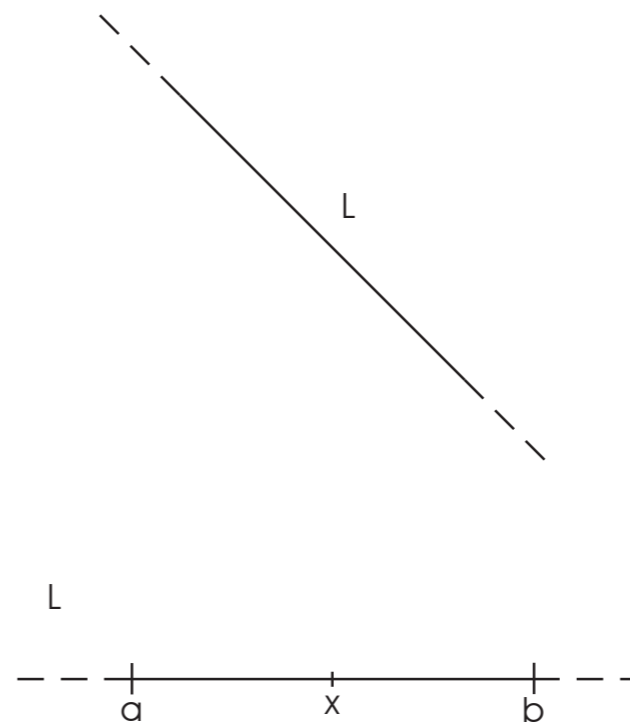
Notación:

La recta se designa con una letra mayúscula. Así tendremos la recta **L**.

La Semirrecta:

Un punto en una recta determina dos **semirrectas** de igual origen y de sentido contrario.

Si observamos el dibujo, la **semirrecta** de la derecha (x b) es opuesta a la semirrecta de la izquierda (x a) del mismo origen.



RECUERDE

1. PROPIEDAD CONMUTATIVA:

El **orden** de los sumandos o sustraendos **no altera el resultado**.

$$a) 4 + 1 = 1 + 4 = \square \quad b) 9 - 3 = -3 + 9 = \square \quad c) -2 - 3 = -3 - 2 = \square$$

$$d) \underline{\hspace{2cm}} \quad e) \underline{\hspace{2cm}} \quad f) \underline{\hspace{2cm}}$$

2. PROPIEDAD ASOCIATIVA:

Al **agrupar** los sumandos o sustraendos **no se altera el resultado**.

$$a) -3 + 8 - 5 + 9 = (8 - 5) + (-3 + 9) = 3 + 6 = \boxed{9}$$

EJERCICIOS

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

$$a) 3 + 8 = \quad d) 8 + 7 - 9 = \quad g) 5 - 6 - 5 + 9 =$$

$$b) 6 - 5 = \quad e) 11 + 10 + 7 = \quad h) 8 - 4 + 7 - 3 =$$

$$c) 5 - 8 = \quad f) 6 + 2 - 12 = \quad i) 9 - 7 - 6 - 5 =$$

2. Resuelva los siguientes problemas:

a. En la Asociación de Vecinos compraron 50 potes de pinturas. Si se utilizan 30 potes en pintar el local y alguien les regala 20 potes ¿Cuántos potes quedan al final?

b. En una Cooperativa tenían 50 sacos de papas. Venden 30 sacos y luego un socio entrega 20 sacos; pero se les dañan 10 sacos con la humedad. ¿Cuántos sacos les quedan para la venta?

PROPORCIONES



En la vida cotidiana existen muchas medidas que dependen del aumento o disminución de otras. Por ejemplo:

- La cantidad de arcilla respecto al número de piezas que se harán.
- La talla del zapato respecto al tamaño de los pies.
- La cantidad de calorías que se consumen con relación al esfuerzo físico, entre otras.

Algunas magnitudes están tan relacionadas entre sí que cuando se altera una de ellas, se alterará también la otra.

Por ejemplo:

Si **1** persona hace **10** ladrillos por día
Entonces **6** personas harán **60** ladrillos por día

Si aumenta la cantidad de personas trabajando en las mismas condiciones es lógico que aumente la cantidad de ladrillos. En este caso la cantidad de personas aumentó 6 veces y la cantidad de ladrillos también. Por tanto se dice que son cantidades proporcionales.

Lo anterior se puede expresar en forma numérica de la siguiente manera:

$$\frac{1}{6} = \frac{10}{60} \quad \text{Se lee: "1 es a 6 como 10 es a 60"}$$

Proporcionalidad directa: Cuando al aumentar una cantidad aumenta la otra (caso anterior)

Personas	1	10	20	30	40 ...	→	aumenta
Ladrillos	6	60	120	180	240 ...	→	aumenta

Proporcionalidad inversa: Cuando al aumentar una cantidad disminuye la otra.

Ejemplo:

6 personas hacen un trabajo en 12 horas, 12 personas lo harán en 6 horas

Personas	6	12	18	36 ...	→	aumenta
Horas	12	6	3	1 ...	←	disminuye

La proporcionalidad inversa se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{6}{12} = \frac{12}{6} \quad \text{Se lee: "6 es a 12 como 12 es a 6"}$$

EJERCICIOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO PROPORCIONALIDAD

En una proporción es posible hallar un término si se conocen tres de ellos.

Ejemplos 1: Se emplearon 7 potes de pintura para pintar 2 paredes. ¿Cuánta pintura necesitare para pintar 6 paredes iguales?

Para resolver este problema aplicamos el procedimiento siguiente:

- Determinamos si la proporción es directa o inversa a mas paredes más pintura, la proporción es directa
- Expresamos el problema en forma de proporción:

$$\frac{2}{6} = \frac{7}{x}$$

x se calcula mediante la expresión:

$$x = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Solución: necesitare 21 potes de pintura.

Ejemplos 2: 6 personas tardaron 2 días para realizar un trabajo. ¿Cuánto tardarán 12 personas?

- Determinamos si la proporción es directa o inversa
A más pintores menos días, la proporción es inversa.

- Expresamos el problema en forma de proporción:

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{x}$$

x se calcula mediante la expresión:

$$x = \frac{6 \cdot 2}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Solución: necesitare 1 pote de pintura.

Problemas.

- Resuelva los siguientes problemas: (hágalo en el cuaderno)
 - Si empleo 7 potes de pintura para pintar la fachada de una casa ¿Cuántos potes de pintura necesitare para pintar 3 fachadas iguales?
 - Si unos obreros hacen 60 metros de pared en 10 días, ¿Cuántos metros de pared harán en 20 días?

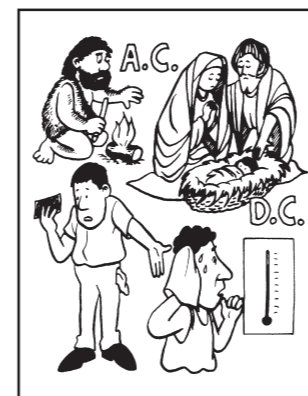
2. Interprete y complete el siguiente cuadro:

MESES	1	2			
SALARIO	10.300		30.900	41.200	5

- Tengo un manual técnico de 250 páginas y leo 30 páginas en una hora, ¿Cuántas páginas habré leído al cabo de 8 horas?
- Si he utilizado 250 litros de agua en 15 días, ¿Cuántos litros habré consumido en 30 días?

SUMA ALGEBRAICA

Existen situaciones donde no podemos emplear los números estudiados hasta ahora



Por ejemplo:

- Una deuda
- Una pérdida
- Un año antes de Cristo
- Una temperatura por debajo de 0°C
- Etc.

No es igual una pérdida de Bs. 500 que una ganancia de Bs. 500
Para resolver esta situación se crean los números positivos y negativos

Números positivos " + " (signo más)

Números negativos " - " (signo menos)

- Una deuda de Bs. 500 se expresa con -500
- 50 años antes de Cristo se expresa con -50
- Una pérdida de Bs 100 se expresa con -100
- 50°C bajo cero se expresa con -50

Los números positivos y negativos forman el conjunto de los **números enteros**. En este conjunto también se realizan las operaciones de suma.

Analiza las diferentes situaciones:

- Debo Bs. 400 y pago 300. ¿Cuánto quedo debiendo?
- Perdí en un negocio Bs. 1500 y en otro Bs. 700. ¿Cuánto perdí?
- Una temperatura de 5°C bajo cero aumentó 15°C. ¿A cuánto llega?
- Gané en un negocio Bs. 3000 y en otro Bs. 2000. ¿Cuánto gané?

Estos casos se expresan de la forma siguiente:
Caso 1: (-400) + (+300) = -100, debo Bs. 100
Caso 2: (-1500) + (-700) = -2.200, perdí Bs. 2.200
Caso 3: (-5) + (+15) = +10, llegó a 10°C
Caso 4: (+3000) + (+2000) = +5000, gané Bs. 5000

Hay casos en los que se presentan más de dos situaciones combinadas:

Ejemplo:

La señora María fue al mercado y le sucedió lo siguiente: Al comprar la carne le dieron 100 gramos de más, en la azúcar 50 gramos menos, en las lentejas 150 gramos más y en el pollo 30 gramos menos. ¿Cuántos gramos trajo de más y cuantos de menos ?

La operación nos queda: +100 - 50 + 150 - 30

Se suman aparte los positivos y negativos

$$\begin{array}{r} -50 \quad +100 \\ -30 \quad +150 \\ \hline -80 \quad +250 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{restamos, y al resultado le} \\ \text{colocamos el signo del} \\ \text{número mayor} \end{array} \quad \begin{array}{r} +250 \\ -80 \\ \hline 170 \end{array}$$

Esta operación donde se suman de manera combinada números positivos y negativos se denomina **suma algebraica**.

$$\begin{array}{r} -7 \quad +4 \\ -8 \quad +1 \\ -9 \quad +5 \\ \hline -25 \end{array}$$

Otro ejemplo: -7 + 4 - 8 - 9 + 1 - 6

$$\begin{array}{r} -6 \\ \hline -30 \end{array}$$

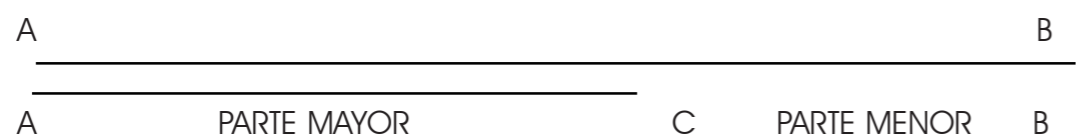
- Nada más fácil, replicó Beremís, puedo explicar esa relación curiosa, de un modo elemental y simple.

- Dada cierta magnitud AB (representada en este caso por un segmento de recta), podemos dividirla al medio, o en dos partes desiguales. La división en dos partes desiguales puede ser hecha, es claro, de una infinidad de , maneras diferentes.

Entre esas divisiones de AB en partes desiguales ¿habrá alguna preferible a las otras?.

- Sí, contesta el matemático. Existe una manera simpática de dividir un todo en dos partes desiguales. Veamos en qué consiste esa forma de división.

Consideremos el segmento AB dividido en dos partes desiguales



Admitamos que esas partes desiguales representan la siguiente relación

"El **segmento total** es a la **parte mayor** como la **parte mayor** es a la **parte menor**"

La proporción es la siguiente:

$$\frac{\text{SEGMENTO TOTAL}}{\text{PARTE MAYOR}} = \frac{\text{PARTE MAYOR}}{\text{PARTE MENOR}}$$

O también:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Esa división corresponde a la forma "simpática" que pueden presentar las dos partes desiguales. Podemos formular la siguiente regla:

" Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe presentar entre la parte mayor y la menor, la misma relación que entre esta y el todo".

Actividad:

1. Haz una división diferente del segmento anterior y expresa la relación en forma de proporción.
2. Asigne valores a los segmentos anteriores y comprueba el resultado.
3. Investiga el significado de los siguientes términos: turco, ciencia, harén, segmento.
4. Qué quiere decir: " ... hermoso desde el punto de vista de la forma..."

Tomado de: El Hombre que calculaba.

REGLA DE TRES DIRECTA



Ejemplo 1:

Si María hornea 20 baldosas diariamente, ¿cuántas baldosas habrá horneado al cabo de una semana?

Es un problema que se resuelve por medio de una regla de tres.

La "regla de tres" es una operación matemática la cual consiste en hallar un valor dados tres valores conocidos. Se plantea de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{En 1 día} \xrightarrow{\text{hornea}} 20 \text{ baldosas} \\ \text{En 7 días} \xrightarrow{\text{hornea}} x \text{ baldosas} \end{array}$$

Como puedes ver es una proporción directa, (a **más** días de trabajo **más** baldosas horneadas) la proporción queda así:

$$\frac{1}{7} = \frac{20}{x} \text{ por lo tanto } \longrightarrow x = \frac{7 \cdot 20}{1} = \boxed{}$$

Sol.: Después de una semana (7 días) María habrá horneado _____ baldosas.
En este caso se dice que es una **regla de tres directa**.

Ejemplo 2:

En 2 días el reloj del horno se atrasa 40 segundos. ¿Cuánto se atrasará en 9 días?

$$\begin{array}{l} 2 \text{ días} \xrightarrow{\text{se atrasa}} 40 \text{ segundos} \\ 9 \text{ días} \xrightarrow{\text{se atrasa}} x \text{ días} \end{array}$$

Es una proporción directa, (a **más** días **más** segundos de atraso) la proporción queda así:

$$\frac{2}{9} = \frac{40}{x} \text{ por lo tanto } \longrightarrow x = \frac{9 \cdot 40}{2} = \boxed{}$$

Sol.: En 9 días el reloj del horno se atrasará _____ segundos.
En ambos ejemplos se dice que es una **regla de tres directa**.

EJERCICIOS

1. Resuelva los siguientes problemas:

- a. En una cooperativa de cultivo de papas recogemos 200 Kg. en 4 días, ¿Cuántos kilos recogeremos en 12 días?
- b. Si con 2 Kg. de harina se preparan 5 tortas, ¿Cuántos kilos de harina se necesitarán para preparar 13 tortas iguales?
- c. Si un pintor utiliza 7 galones de pintura para pintar 3 pisos de una casa, ¿Cuántos galones necesitará para pintar 14 pisos iguales?
- d. Un camionero recorre 750 Kms. cada dos días ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una semana (7 días)? ¿Y en 30 días?

LA MATEMÁTICA Y LA BELLEZA (Lectura complementaria)

Uno de los hombres más populares de Bagdad es un turco, llamado Hassan Muarique, quien ejerce el cargo de jefe de guardias del sultán.

Había yo observado que Hassan se tornaba día a día uno de los más asiduos concurrentes del "Palito Dorado". Raro era el día en que el guapo capitán de policía no se presentara a hacer una consulta al calculista.

Hoy, al regresar de la mezquita, encontré a Muarique en animada conversación con Beremís. Se trataba de la resolución de un nuevo problema que parecía muy complicado, pues vi al talentoso matemático, indeciso, analizando figuras y aplicando fórmulas sin llegar a un resultado satisfactorio.

Al final se retiró el turco con los guardias que lo acompañaban.

Sólo entonces pude oír la explicación, de labios de Beremís, de aquel raro interés del turco por la ciencia.

Me contó el calculista lo siguiente:

- Hassan Muarique, capitán de la guardia, resolvió casarse con una joven llamada Zaira.

No quería arriesgarse a pedir a la jovencita en casamiento, sin asegurarse previamente si era hermosa o estaba desprovista de encantos. Ya había recurrido a todos los artificios imaginables para descubrir el rostro de Zaira. Ante ese inconveniente Hassan me ha pedido lo auxiliase a resolver el problema. ¿Cómo deberá hacer para asegurarse antes del casamiento, de la belleza de su esposa?

Hallé original la consulta y le dije:

La matemática posee recursos maravillosos. Con el auxilio de dicha ciencia puede el hombre calcular el peso de un camello, la altura de una torre o la belleza de una mujer. Y como el me miró con ojos espantados, aclaré: sí, con auxilio de una relación geométrica, puede el matemático determinar si una joven es hermosa o fea, es decir, si sus formas son perfectas o no. Es enteramente innecesario, para el novio, ver el rostro de su futura esposa para prevenirse contra cualquier desilusión. Basta disponer de media docena de medidas y aplicar a ellas "la fórmula matemática de la belleza".

- Exigí que Hassan obtuviera ciertas medidas del rostro de Zaira. Esas medidas tomadas en el interior del harén. Disponiendo de esas medidas aplique las fórmulas, calculé las relaciones y llegué a los siguientes resultados:

" La joven Zaira es linda como la decimotercera hurí del cielo de Alah"

- Es increíble que pueda el álgebra llegar a ese resultado. ¿ Es posible saber en qué consiste esa fórmula matemática de belleza?.

EJERCICIOS

1. Resuelva los siguientes ejercicios.

- a) El 25% de 70
 b) El 50% de 60
 c) El 20% de 80
 d) El 45% de 610
 e) El 40% de 1890
- f) ¿Qué porcentaje es 5 de 800?
 g) ¿Qué porcentaje es 4 de 10?
 h) ¿Qué porcentaje es 60 de 750?
 i) ¿De qué número es 8 el 20%?
 j) ¿De qué número es 160 el 80%?

2. Resuelva los siguientes problemas:

a. Una bomba de gasolina vendió en un día 1200 litros, de los cuales, 400 fueron para autobuses. ¿Qué porcentaje de gasolina fue vendido a los autobuses?

b. En una fábrica hay 1200 empleados de los cuales el 45% son mujeres. ¿Cuántas mujeres trabajan en la fábrica?

c. Un vendedor recibe el 20% de comisión por las ventas realizadas. ¿cuánto recibirá por la venta de 65.000 Bs.?

d. En un cultivo se cosechan 750 Kg. de verduras, de los cuales el 45% es para el comercio con otras comunidades. ¿Cuántos Kg. están destinados para el comercio?

REGLA DE TRES INVERSA



Ejemplo 1:

20 obreros hacen un trabajo en 15 días. ¿Cuánto tardarán 25 obreros en realizar el mismo trabajo?

Cuantos **más** obreros trabajen **menor** es el tiempo para terminar la obra.

Este es un problema de **proporcionalidad inversa**.

Se resuelve por medio de una **regla de tres inversa**.

Este tipo de procedimiento, donde al aumentar una magnitud, la otra disminuye, decimos que es una **regla de tres inversas**.

La regla de tres se plantea así:

$$\begin{array}{l} 20 \text{ obreros} \xrightarrow{\text{NECESITAN}} 15 \text{ días} \\ 25 \text{ obreros} \xrightarrow{\text{NECESITARÁN}} x \end{array}$$

Al ser proporción inversa (a **más** obreros / **menos** tiempo para concluir la obra) la proporción queda así:

$$\frac{20}{25} = \frac{15}{x} \quad \text{por lo tanto:} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{20 \cdot 15}{25} = \boxed{}$$

Sol.: 25 obreros tardarán _____ días en realizar la misma obra.

Ejemplo 2:

En una pequeña fábrica, si 6 costureras cosen todo el encargo en 12 horas, ¿Cuánto tardarán 9 costureras?

$$\begin{array}{l} 6 \text{ costureras} \xrightarrow{\text{NECESITAN}} 12 \text{ horas} \\ 9 \text{ costureras} \xrightarrow{\text{NECESITARÁN}} x \end{array} \quad \text{NECESITARÁN}$$

Proporción inversa (a **más** costureras **menos** horas de trabajo)

$$\frac{6}{9} = \frac{12}{x} \quad \text{por lo tanto:} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{6 \cdot 12}{9} = \boxed{}$$

Sol.: 9 costureras tardarán _____ días.

EJERCICIOS

1. Resuelva en el espacio en blanco los siguientes problemas:

- a. Si 7 obreros pintan todo un edificio en 40 días, ¿Cuántos días tardarán en concluir el mismo trabajo 20 pintores?

- b. Si en una cooperativa trabajan 30 personas para construir una escuela en 90 días. ¿Cuánto tardarán si a los miembros de la cooperativa se les unen otras 15 personas más?

- c. Si un carro va a una velocidad de 80 Kms. por hora y llega a su destino en 5 horas. ¿Cuánto tardaría a una velocidad de 100 Kms. por hora?

EL PORCENTAJE

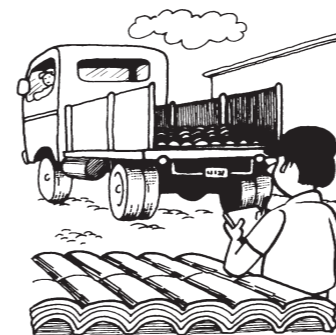
El **porcentaje** de un número es la cantidad de unidades que hay por cada cien unidades existentes en dicho número.

Ejemplo:

En la producción del mes de marzo se fabricaron 500 tejas y por cada cien unidades se vendieron 36. ¿Cuántas no se vendieron?



100	100	100	100	100	Producción	500
36	36	36	36	36	vendidas	180
64	64	64	64	64	no vendidas	320



Esto se expresa de la siguiente manera:

36% (36 por ciento) de la producción se vendió. (180 tejas)

64 % (64 por ciento) de la producción no se vendió. (320 tejas)

Se puede decir además que :

- el 36% de 500 es 180

- el 64% de 500 es 320

Estos cálculos se simplifican aplicando **proporcionalidad** y **regla de tres**.

PROBLEMA 1 (ejemplo anterior):

Se fabrican 500 tejas y se vendió el 36%. ¿Cuántas tejas se vendieron?

$$\begin{array}{l} 100 \% \longrightarrow 500 \text{ Tejas} \\ 36 \% \longrightarrow x \text{ Tejas} \end{array} \quad \frac{100}{36} = \frac{500}{x} \quad x = \frac{500 \cdot 36}{100} = \mathbf{180 \text{ tejas}}$$

PROBLEMA 2:

Se fabrican 500 tejas y se vendió 350. ¿Qué porcentaje se vendió?

$$\begin{array}{l} 100 \% \longrightarrow 500 \text{ Tejas} \\ x \longrightarrow 350 \text{ Tejas} \end{array} \quad \frac{100}{x} = \frac{500}{350} \quad x = \frac{100 \cdot 350}{500} = \mathbf{70\%}$$

PROBLEMA 3:

Si se vendieron 450 tejas y esa cantidad es el 90% de la producción. ¿Cuántas tejas se fabricaron?

$$\begin{array}{l} 90 \% \longrightarrow 450 \text{ Tejas} \\ 100\% \longrightarrow x \text{ Tejas} \end{array} \quad \frac{90}{100} = \frac{450}{x} \quad x = \frac{100 \cdot 450}{90} = \mathbf{500 \text{ tejas}}$$